Nivelación Física ⋆ Problemas Resueltos

Sistemas de Coordenadas

Dirección de Pregrado, Ingeniería UC

Coordinación: Sebastián Urrutia Quiroga
Ayudante: Martín Cepeda Vega
Revisor: Francisco Eterovic Barra

Introducción

El presente texto corresponde al trabajo realizado por el Equipo de Nivelación de Física durante el primer semestre de 2017. Con el apoyo de la Dirección de Pregrado de la Escuela de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, este equipo recopiló y resolvió diversos problemas en cuatro tópicos introductorios al curso *Estática y Dinámica*.

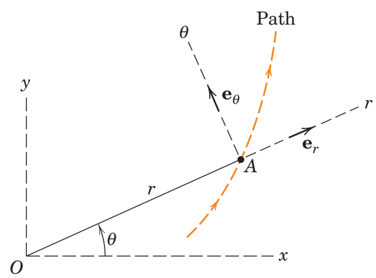
La selección de los problemas tienen como objeto facilitar la adaptación de los alumnos a la física de nivel universitario. El orden de los mismos es incremental en dificultad, de acuerdo al criterio del ayudante que elaboró este documento. En el final del mismo se pueden encontrar las fuentes de donde provienen los problemas e imágenes utilizados en la elaboración de este compilado.

Esperamos que este conjunto de problemas resulte de utilidad para los alumnos, y que contribuya a su proceso educativo en el primer curso de física durante su formación como Ingenieros. Cualquier comentario, favor comunicarse con la Dirección de Pregrado para canalizar las inquietudes a quien corresponda.

Equipo de Nivelación
Primer Semestre de 2017

Problema 1.
Encuentre las coordenadas polares de un punto (x, y) genérico.

Solución:
Se tiene la siguiente situación:



Por el teorema de pitágoras, se obtiene que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

y ocupando las relaciones trigonométricas se tiene que:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Luego las coordenadas polares del punto (x,y) son $(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r}, \underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{\theta})$

Problema 2.
¿Cómo puede visualizarse la transformación desde el plano cartesiano al plano polar? ¿es esta transformación uno a uno?

Solución:
En el plano polar, cada recta que pasa por el origen es un ángulo fijo, mientras que cada circunferencia centrada en el origen es un radio fijo. En el plano cartesiano, por lo tanto, los gráficos periódicos aparecen como figuras cerradas en el plano polar. Un ejemplo de esto se puede encontrar en: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/53/Cartesian_to_polar.gif

La transformación geométrica anterior, sin embargo, no es uno a uno pues para un radio nulo existen infinitos ángulos que representan el mismo punto. Esto en coordenadas polares sólo ocurre en el origen.

Problema 3.
Deduzca las fórmulas para operar en coordenadas polares (suma, resta, producto punto)

Solución:
Partiendo desde las coordenadas cartesianas, se tiene lo siguiente: Sean dos vectores $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

- suma/resta:

$$P_1 \pm P_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2) = \left(\sqrt{(x_1 \pm x_2)^2 + (y_1 \pm y_2)^2}, \arctan(\frac{y_1 \pm y_2}{x_1 \pm x_2})\right)$$

- producto punto:

$$P_1 \cdot P_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = r_1r_2\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

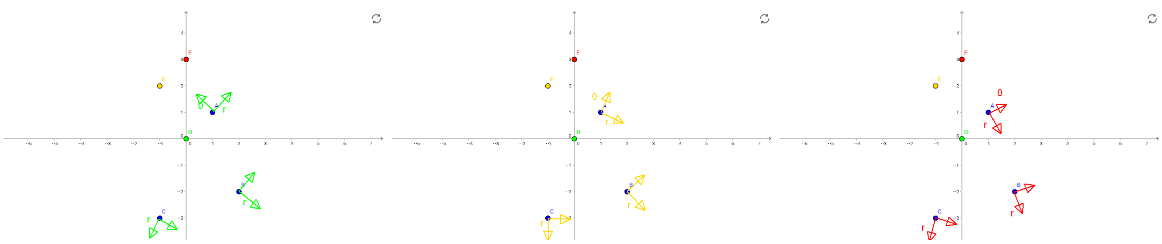
Problema 4.
Para los siguientes puntos, indique con flechas las direcciones polares tomando el centro en i. (0,0) ii. (-1,2) y iii. (0,3)

a) (1,1)

b) (2,-2)

c) (-1,-3)

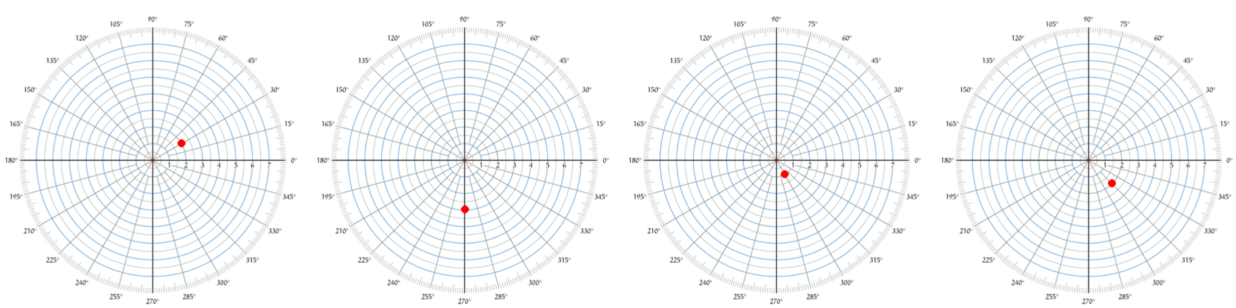
Solución:



Problema 5.
Grafique los siguientes puntos en coordenadas polares:

- (2,30)
- (3,-π/2)
- (1,-60)
- (2,-45)

Solución:



Problema 6.
Halle las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos:

- $P_1(3, \frac{2\pi}{3})$
- $P_2(1, \pi)$

- $P_3(0, 15\pi)$

Solución:
Para cada uno de los puntos pedidos, se tiene que $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$:

- $P_1(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$
- $P_2(-1, 0)$
- $P_3(0, 0)$

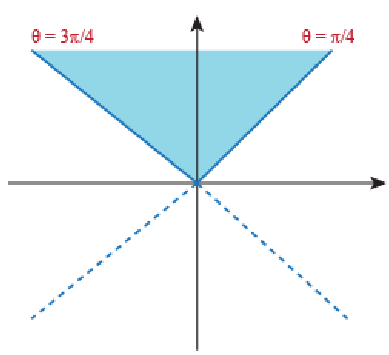
Problema 7.
Halle las coordenadas polares de los siguientes puntos:

- $P_1(1, 1)$
- $P_2(1, -1)$
- $P_3(3, 4)$

Solución:
Para cada uno de los puntos pedidos, se tiene que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan\frac{y}{x}$:

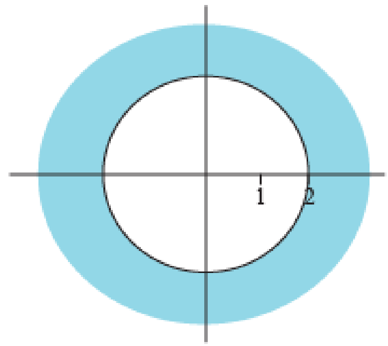
- $P_1(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$
- $P_2(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$
- $P_3(5, \arctan\frac{4}{3})$

Problema 8.
Escriba las desigualdades que le permitan caracterizar la siguiente región:



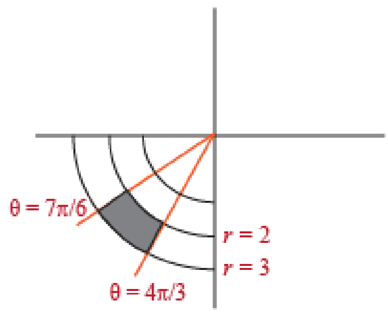
Solución:
Tenemos que la región sólo es limitada por θ, luego la desigualdad que permite representar lo pedido es $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$

Problema 9.
Escriba las desigualdades que le permitan caracterizar la siguiente región:



Solución:
Tenemos que la región sólo es limitada por r, luego la desigualdad que permite representar lo pedido es $r \geq 2$

Problema 10.
Escriba las desigualdades que le permitan caracterizar la siguiente región:



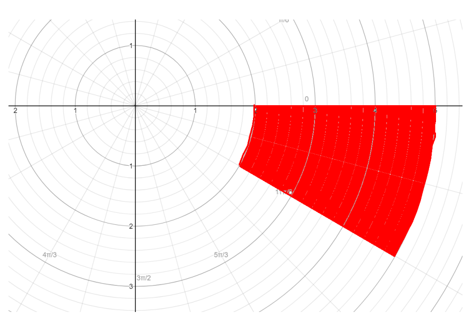
Solución:
Tenemos que la región es limitada tanto por r como por θ, luego las desigualdades que permiten representar lo pedido son

$$\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}$$
$$2 \leq r \leq 3$$

Problema 11.
Dibuje la región acotada por

$$\frac{11\pi}{6} \leq \theta \leq 2\pi$$
$$2 \leq r \leq 5$$

Solución:



Problema 12.
Dado un punto $P(r, \theta, \varphi)$ en coordenadas esféricas ¿qué significado geométrico tiene sumar una constante a cada coordenada?

Solución:
Una suma tanto en θ como en φ gira al punto manteniendo una misma latitud o longitud respectivamente, mientras que una suma en r cambia la distancia del punto hasta el origen del sistema.

Problema 13.
Dado un punto $P(r, \theta, z)$ en coordenadas cilíndricas ¿qué significado geométrico tiene sumar una constante a cada coordenada?

Solución:
Para r y θ es análogo a las coordenadas polares. Una suma en z cambia la altura del punto, desplazándolo hacia arriba o hacia abajo.

Problema 14.
Dado un punto $P(x, y, z)$ en coordenadas cartesianas ¿qué significado geométrico tiene sumar una constante a cada coordenada?

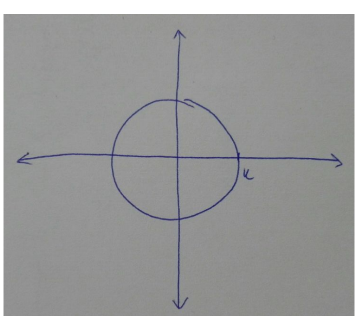
Solución:
Para cada una de las coordenadas, una suma en ellas desplaza el punto en la dirección del respectivo eje.

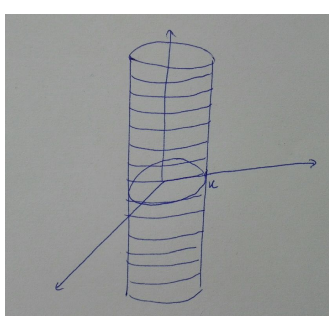
Problema 15.
Dado un punto $P(r, \theta)$ en coordenadas polares ¿qué significado geométrico tiene sumar una constante a cada coordenada?

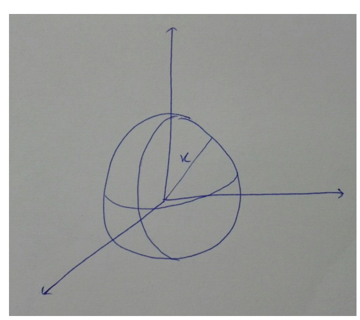
Solución:
Una suma en ángulo «gira» el punto en cuestión, mientras que una suma en radio acerca o aleja la posición del punto respecto al origen.

Problema 16.
¿Qué figura resulta de graficar $r = k$ (k constante) en coordenadas polares? ¿y en coordenadas cilíndricas? ¿y en coordenadas esféricas?

Solución:
En coordenadas polares, se ve como una circunferencia de radio k centrada en el origen. En coordenadas cilíndricas, se ve como un cilindro de radio k y altura infinita, mientras que en coordenadas esféricas se ve como una esfera de radio k centrada en el origen:

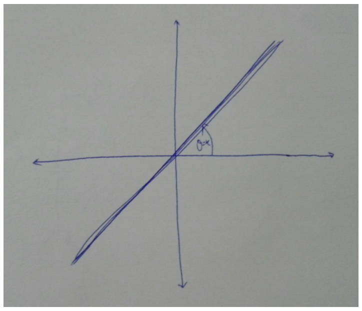
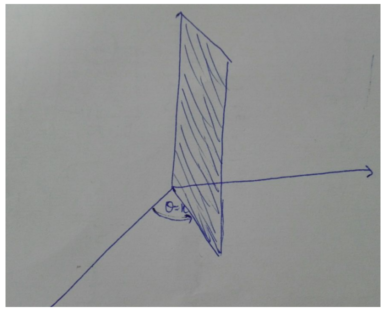
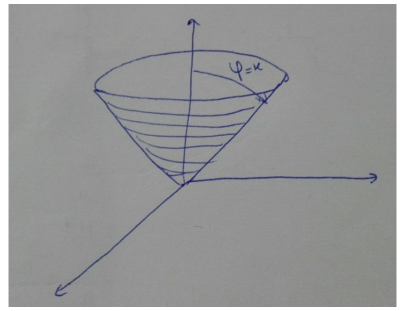






Problema 17.
¿Qué figura resulta de graficar $\theta = k$ (k constante) en coordenadas polares? ¿y en coordenadas cilíndricas? ¿y $\varphi = k$ en coordenadas esféricas?

Solución:
En coordenadas polares, un ángul constante se ve como una recta que pasa por el origen. En coordenadas cilíndricas, como un plano perpendicular al plano XY que pasa por el eje z, mientras que un ángulo φ constante se ve en coordenadas esféricas como un cono de altura infinita cuyo vértice está en el origen:

Problema 18.
Escriba las siguientes ecuaciones en coordenadas cartesianas:

- $r = 4$
- $r = \sin\theta - \cos\theta$
- $r^2 = \cos\theta$

Solución:
Ocupando las relaciones polares ya conocidas, se tiene que:

- $$r = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4^2$$
- $$r = \sin\theta - \cos\theta \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ $$x^2 + y^2 = y - x$$
- $$r^2 = \cos\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ $$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = x$$

Problema 19.
Escriba la ecuación $r\sin\theta = 1$ en coordenadas cartesianas

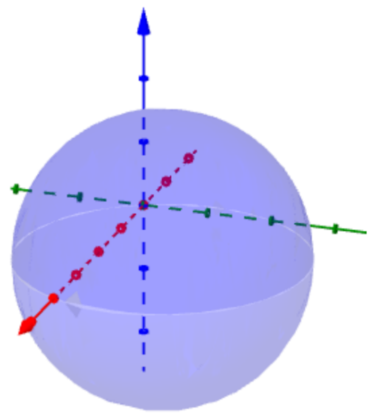
Solución:
Reemplazando tenemos que:

$$\sqrt{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$
$$y = 1$$

Problema 20.
Describa la superficie dada por la ecuación $r = 4\sin\varphi\sin\theta + 2\sin\varphi\cos\theta$

Solución:
Reemplazando directamente a coordenadas cartesianas y completando cuadrados se llega a que la superficie en cuestión es

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$$

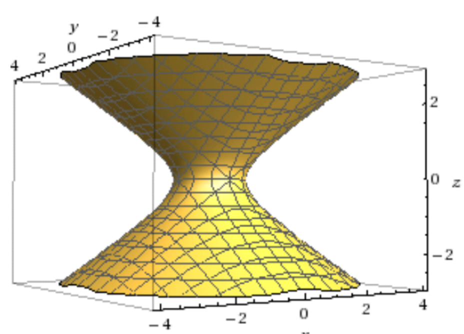


Problema 21.
Describa la superficie dada por la ecuación $r^2 - 2z^2 = 1$

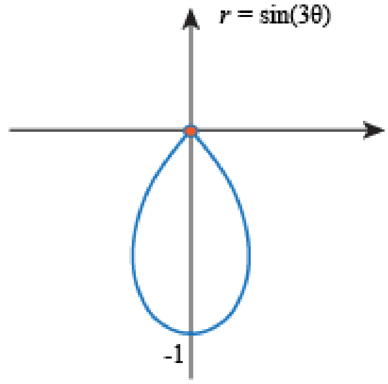
Solución:
Reemplazando directamente r^2 tenemos que la superficie es:

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$$

Lo que corresponde a un hiperboloide:



Problema 22.
¿Para qué valores de θ se logra la siguiente figura?



Solución:
Tenemos que $r = \sin 3\theta$ es una rosa polar de 3 pétalos. El pétalo que se muestra en la figura es el último (pues pasa por -1 y termina en el eje x) luego los ángulos que lo generan son tales que:

$$\frac{2}{3} \cdot 2\pi \leq \theta \leq 2\pi$$

Problema 23.
Encuentre todos los puntos del primer cuadrante donde $r = 2\sin 3\theta$ y $r = 1$ se intersecan.

Solución:
Igualando ambas ecuaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 &= 2\sin 3\theta \\ \frac{1}{2} &= \sin 3\theta \end{aligned}$$

como estamos en el primer cuadrante

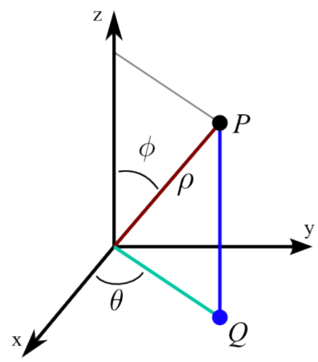
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} &= 3\theta \\ \Rightarrow \theta &= \frac{\pi}{18} = 10^o \end{aligned}$$

sin embargo, como la función seno es positiva en el primer y segundo cuadrante, se tiene que

$$\begin{aligned} \pi - \frac{\pi}{6} &= 3\theta \\ \Rightarrow \theta &= \frac{5\pi}{18} = 50^o \end{aligned}$$

Problema 24.
Dado un punto $P(r, \theta, z)$ en coordenadas cilíndricas ¿qué coordenadas esféricas tiene?

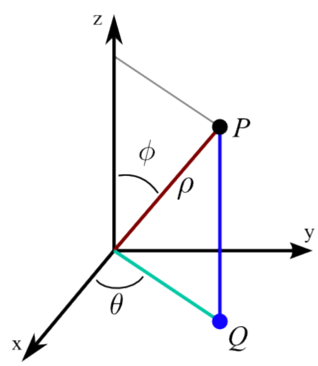
Solución:



Tenemos que $\varphi = \arctan\left(\frac{r}{z}\right)$ luego el punto $P(r,\theta,z)$ en coordenadas esféricas queda como $P(\sqrt{r^2+z^2},\theta,\arctan\left(\frac{r}{z}\right))$

Problema 25.
Dado un punto $P(r,\theta,\varphi)$ en coordenadas esféricas ¿qué coordenadas cilíndricas tiene?

Solución:



Como en coordenadas cartesianas tenemos que $z = r\cos\varphi$, y además la proyección en el plano XY de r es $r\sin\varphi$, el punto $P(r,\theta,\varphi)$ queda en coordenadas cilíndricas como $P(r\sin\varphi,\theta,r\cos\varphi)$

Problema 26.
Encuentre el área de un triángulo cuyos vértices son (en coordenadas polares) $P_1(r_1,\theta_1)$, $P_2(r_2,\theta_2)$ y el origen.

Solución:
De la operatoria de vectores sabemos que el área de un triángulo definido por los puntos a y b es $A = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.
Pasando la información del enunciado a coordenadas cartesianas se tiene que:

$$\begin{aligned} P_1 &= (r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1) \\ P_2 &= (r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2) \end{aligned}$$

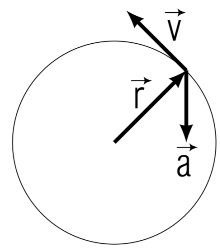
luego

$$\begin{aligned} |P_1\times P_2| &= |r_1r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2)| \\ &= |r_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2)| \end{aligned}$$

entonces

$$A = \frac{1}{2}r_1r_2|\sin(\theta_1-\theta_2)|$$

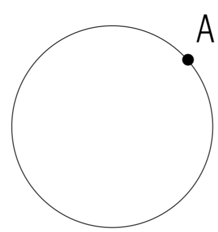
Problema 27.
La posición, velocidad y aceleración de una partícula se muestran a continuación:



¿La partícula se mueve a favor o en contra de las manecillas del reloj?¿Su velocidad está aumentando, disminuyendo o se mantiene constante?

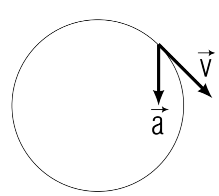
Solución:
Del vector velocidad podemos decir que la partícula se mueve en contra de las manecillas del reloj. Como además el vector aceleración forma un ángulo obtuso con la velocidad, podemos afirmar que esta última está disminuyendo.

Problema 28.

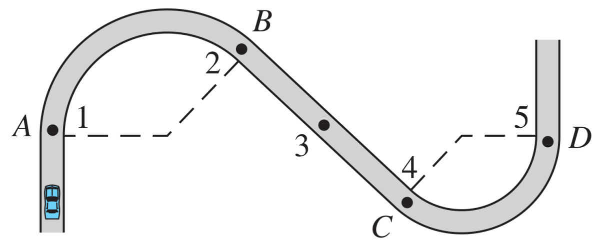


La partícula en el punto A se mueve a favor de las manecillas del reloj, con una velocidad que aumenta. Dibuje sus vectores de velocidad y aceleración.

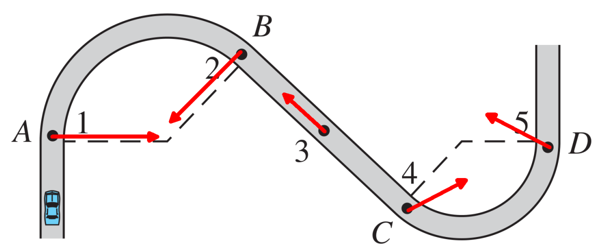
Solución:



Problema 29.
Un automóvil recorre la parte AB de la curva S a rapidez constante, desacelera en BC y acelera en CD. Muestre la dirección aproximada del vector aceleración en cada uno de los cinco puntos indicados:



Solución:
Tenemos que entre los puntos A y B hay un MCU, luego la aceleración es perpendicular a la trayectoria apuntando hacia el centro de la rotación. En BC desacelera sin rotar, luego la aceleración es contraria al sentido del movimiento. Finalmente, en el tramo CD el automóvil rota y acelera, por lo que el vector aceleración tendrá un componente tangencial y perpendicular a la trayectoria:



Problema 30.
Considere una partícula moviéndose en el plano XY de acuerdo a la trayectoria $\vec{\mathbf{r}} = r(\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}})$ con r y ω constantes. Encuentre la trayectoria, velocidad y aceleración de esta partícula.

Solución:
Ocupando la identidad pitagórica $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, tenemos que $|\mathbf{r}| = r$ se mantiene constante, luego la trayectoria que describe la partícula es un círculo. Calculando la velocidad y aceleración tenemos que:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= r\omega(-\sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}) \\
\vec{a} &= r\omega^2(-\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} - \sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}) \\
&= -\omega^2\vec{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

Problema 31.
Dada una partícula con trayectoria $\vec{\mathbf{r}} = A(e^{\alpha t}\hat{\mathbf{i}} + e^{-\alpha t}\hat{\mathbf{j}})$ con A y α constantes, encuentre la velocidad de esta partícula y bosqueje su trayectoria.

Solución:
Tenemos que

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= A(\alpha e^{\alpha t}\hat{\mathbf{i}} - \alpha e^{-\alpha t}\hat{\mathbf{j}})
\end{aligned}$$

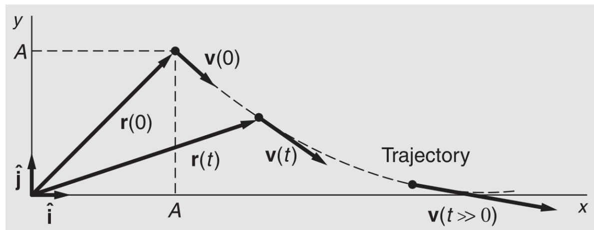
La magnitud de $\vec{v}$ es:

$$v = A\alpha\sqrt{e^{2\alpha t} + e^{-2\alpha t}}$$

Para bosquejar la trayectoria miramos el caso límite ($t = 0$)

$$\vec{r}(0) = A(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$$
$$\vec{v} = \alpha A(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$$

De esto notamos que $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$ son perpendiculares. Cuanto $t \to \infty$, $e^{\alpha t} \to \infty$ y $e^{-\alpha t} \to 0$ con lo que $\vec{r} \to Ae^{\alpha t}\hat{\mathbf{i}}$ y $\vec{v} \to \alpha Ae^{\alpha t}\hat{\mathbf{i}}$. Con esto, la partícula se pega al eje x adquiriendo una velocidad cada vez mayor. Así, un bosquejo de la trayectoria de la partícula queda como:



Problema 32.
Una pelota de pin-pon es soltada cerca de la superficie de la luna con una velocidad $\vec{\mathbf{v_o}} = (0.5, 3)$ $[m/s]$. Esta acelera hacia el suelo con una aceleración $\vec{\mathbf{a}} = (0, -1.6)$ $[m/s^2]$. Encuentre su velocidad después de 5 segundos.

Solución:
En primer lugar, consideremos una vista lateral del lanzamiento de la pelota. Con esto x representa el avance paralelo a la superficie de la luna e y representa la altura medida hasta la pelota en cuestión.

Se tiene que:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t')dt'$$

Para cada uno de los componentes, reemplazamos en $t = 5$:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \left(0.5 + \int_0^5 (0)dt'\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(3 + \int_0^5 (-1.6)dt'\right)\hat{\mathbf{j}}) \\ &= 0.5\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} \quad [\mathrm{m/s}]\end{aligned}$$

Problema 33.
Una partícula se mueve en un círculo de radio b con velocidad angular $\dot{\theta} = \alpha t$ con α constante. Describa el movimiento de esta partícula en coordenadas polares.

Solución:
Como $r = b$ constante, $\vec{v}$ es puramente tangencial a la trayectoria. Es más, $\vec{v} = b\alpha t\hat{\theta}$. Con esto, la partícula se encontrará en un tiempo t a un radio b y con un ángulo

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_o + \int_0^t \dot{\theta}dt \\ &= \theta_o + \frac{1}{2}\alpha t^2\end{aligned}$$

Así

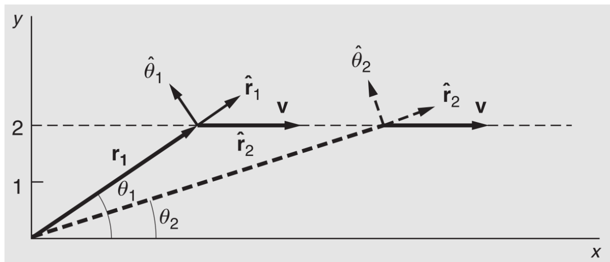
$$\vec{r}(t) = b\hat{\mathbf{r}}$$

con

$$\theta = \theta_o + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Problema 34.
Considere una partícula moviéndose con velocidad constante $\vec{\mathbf{v}} = \mathrm{u}\hat{\mathbf{i}}$ a través de la recta $y = 2$. Describa $\vec{\mathbf{v}}$ en coordenadas polares.

Solución:
Se tiene la siguiente situación:



Tenemos que $v_r = u\cos(\theta)$ y $v_\theta = -u\sin(\theta)$. Luego $\vec{v} = u\cos(\theta)\hat{\mathbf{r}} - u\sin(\theta)\hat{\theta}$. A medida que la partícula se mueve a la derecha, θ disminuye y los vectores unitarios cambian de dirección. Este es un ejemplo de la importancia de elegir un sistema de coordenadas adecuado al problema, pues la misma velocidad de la partícula puede ser expresada cartesianamente como $\vec{\mathbf{v}} = \mathrm{u}\hat{\mathbf{i}}$ tal como aparece en el enunciado.

Problema 35.
Una hormiga se mueve por los rayos de una bicicleta con una velocidad constante de u centímetros por segundo. La rueda de la bicicleta gira con una velocidad angular constante en sentido antihorario $\dot{\theta} = \omega$ radianes por segundo alrededor de su eje. En $t = 0$, la hormiga se encuentra en el centro de la rueda, en un rayo paralelo al suelo. Encuentre la velocidad para un tiempo t de la hormiga en coordenadas cartesianas y polares.

Solución:

Tenemos que $r = ut$, $\dot{r} = u$ y $\dot{\theta} = \omega$. Luego $\vec{v} = u\hat{\mathbf{r}} + u\omega\hat{\theta}$. En coordenadas cartesianas, se tiene que:

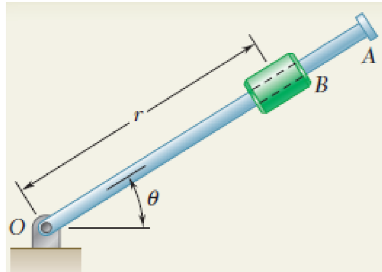
$$\begin{aligned} v_x &= v_r\cos(\theta) - v_\theta\sin(\theta) \\ v_y &= v_r\sin(\theta) + v_\theta\cos(\theta) \end{aligned}$$

como $v_r = u$, $v_\theta = u\omega t$ y $\theta = \omega t$ queda la velocidad en polares como

$$\vec{v} = (u\cos(\omega t) - u\omega t\sin(\omega t))\hat{\mathbf{i}} + (u\sin(\omega t) + u\omega t\cos(\omega t))\hat{\mathbf{j}}$$

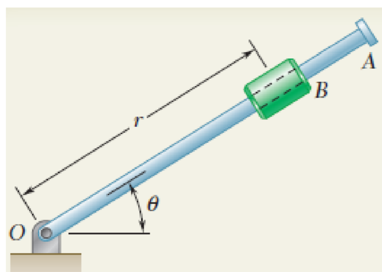
Podemos notar que en coordenadas polares se simplifica mucho el problema debido a la simetría central del problema. La trayectoria descrita or la hormiga es conocida como la espiral de Arquímides.

Problema 36.
El brazo OA se mueve según $\theta = 0.15t^2$ [rad]. En este brazo, un deslizador B se mueve de tal forma que su distancia hasta O es $r = 0.9 - 0.12t^2$. Luego de que OA haya rotado 30^o, encuentre la rapidez del deslizador B.



Solución:
Reemplazando en el ángulo dado tenemos que que el tiempo para un ángulo de 30^o es $t = \sqrt{0.524/0.15} = 1.869$ [s]. Sustituyendo este tiempo en las ecuaciones de r y θ se tiene que para un ángulo de 30^o, $r = 0.481$. De las ecuaciones tenemos que $\dot{r} = -0.24t$ y $\dot{\theta} = 0.30t$. Con esto, $|v| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} = 0.524$

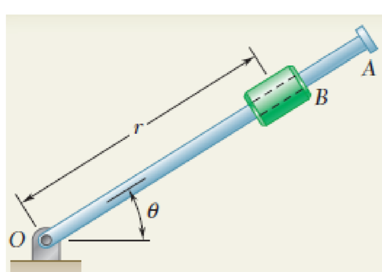
Problema 37.
Para el problema anterior, luego de que OA haya rotado 30^o, encuentre la magnitud de la aceleración del deslizador B.



Solución:
De las ecuaciones dadas se tiene que $\dot{r} = -0.24t$, $\ddot{r} = -0.14$, $\dot{\theta} = 0.30t$ y $\ddot{\theta} = 0.30$. Con esto, reemplazando el tiempo encontrado en la pregunta anterior:

$$|a| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} = 0.531$$

Problema 38.
Para el problema anterior, luego de que OA haya rotado 30^o, encuentre la aceleración relativa del deslizador B respecto al brazo OA.

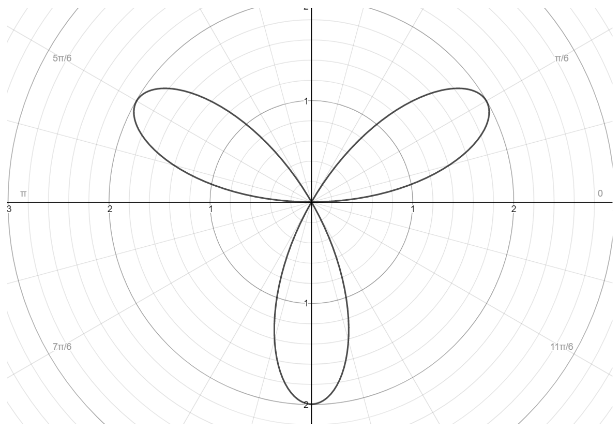


Solución:
Como el movimiento del deslizador es según $\vec{r}$, tenemos que la aceleración de B respecto a OA es simplemente $\ddot{r} = -0.24$

Problema 39.
Grafique los puntos que cumplan con lo siguiente:

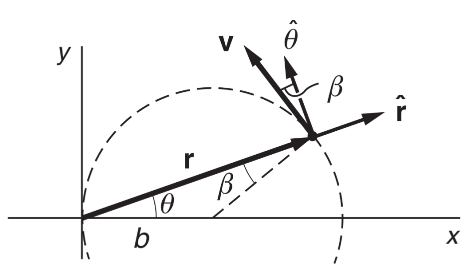
$$r = 2\sin 3\theta$$

Solución:
De la ecuación notamos que $\sin 3\theta$ está acotado entre -1 y 1, pasando por 0 6 veces si es que θ va de 0 a 2π. Partiendo desde un ángulo nulo, se forma un primer pétalo para $0 \leq \theta \leq 2\pi/3$, luego al ir avanzando en intervalos de $2\pi/3$ se forman los 2 pétalos restantes:



Problema 40.
Una partícula se mueve con velocidad constante v alrededor de un círculo de radio b, cuyo centro está desplazado b unidades del origen del sistema de coordenadas de tal forma que el círculo queda tangente al eje y. Encuentre la velocidad de la partícula en coordenadas polares.

Solución:
Se tiene la siguiente situación:



Debido al origen desplazado de la trayectoria circular, $\vec{v}$ ya no es paralelo a $\hat{\theta}$. Se tiene entonces:

$$\vec{v} = -v\sin(\theta)\hat{\mathbf{r}} + v\cos(\theta)\hat{\theta}$$

Esto se debe a que $\beta = \theta$ pues se forma un triángulo isosceles. Debemos encontrar ahora θ en función de t, por la geometría del problema tenemos que $2\theta = \omega t$ con $\omega = v/b$. Así:

$$\vec{v} = -v\sin(vt/2b)\hat{\mathbf{r}} + v\cos(vt/2b)\hat{\theta}$$

Problema 41.
Una hormiga se mueve con velocidad constante u ahora por el rayo de una rueda de bicicleta muy grande. Si

parte desde el centro en $t = 0$ y la posición angular de la rueda está dada por $\theta = \omega t$ con t constante, encuentre la velocidad y aceleración de la hormiga en coordenadas polares.

Solución:

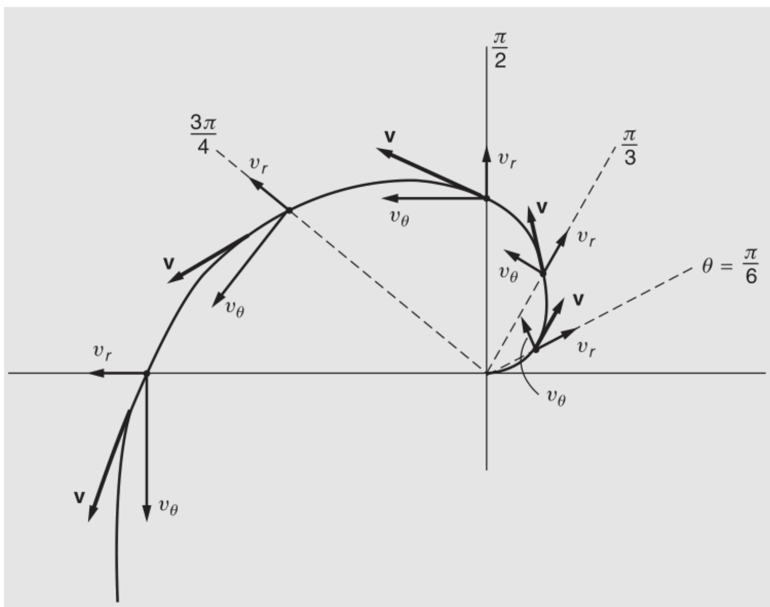
Tenemos que $\dot{r} = u$ y $\theta = \omega t$ luego $\dot{\theta} = \omega$. La posición radial viene dada entonces por $r = ut$ y

$$\vec{v} = u\hat{\mathbf{r}} + u\omega t\hat{\theta}$$

la aceleración es

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \\ &= -u\omega^2 t\hat{\mathbf{r}} + 2u\omega\hat{\theta}\end{aligned}$$

La trayectoria de la hormiga para distintos ángulos puede visualizarse a continuación:



Problema 42.
Encuentre los valores de β que hacen que una partícula que se mueve a velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega$ y radio $r = r_o e^{\beta t}$ tenga aceleración radial nula.

Solución:

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \\ &= (\beta^2 r_o e^{\beta t} - r_o e^{\beta t}\omega^2)\hat{\mathbf{r}} + 2\beta r_o e^{\beta t}\omega\hat{\theta}\end{aligned}$$

Con esto, es claro que si $\beta = \pm\omega$ la parte radial de $\vec{a}$ se vuelve nula.

Problema 43.
Un tambor de radio R rueda por un plano inclinado sin resbalarse. El centro del tambor acelera con una magnitud a paralelamente al plano por donde rueda. Encuentre la aceleración angular del tambor.

Solución:
Como el tambor no resbala, al girar un ángulo θ la distancia que recorre el borde del tambor es $s = R\theta$. Luego:

$$\begin{aligned} x &= R\theta \\ a &= \ddot{x} = R\ddot{\theta} = R\alpha \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{a}{R} \end{aligned}$$

Problema 44.
Una partícula se mueve en un plano con velocidad radial constante $\dot{r} = 4$ [m/s], partiendo desde el origen del sistema coordenado. La velocidad angular también es constante de magnitud $\dot{\theta} = 2$ [rad/s]. Cuando la partícula esté a 3 [m] del origen, calcule la magnitud de su velocidad y aceleración.

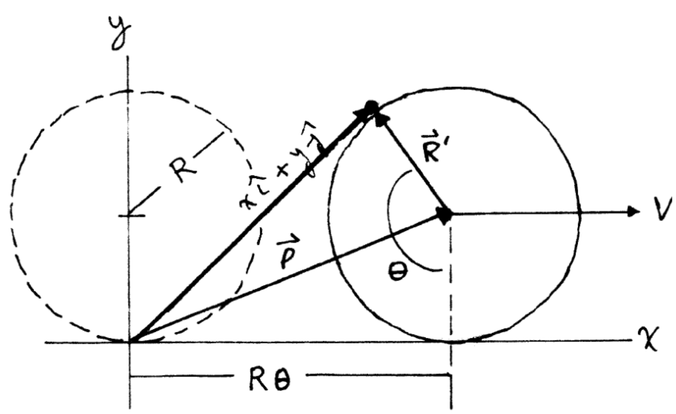
Solución:
Reemplazando directamente tenemos que $\vec{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = 4\hat{\mathbf{r}} + 6\hat{\theta}$ luego la magnitud de su velocidad es $\sqrt{4^2+6^2} \approx 7.2$ [m/s]. Para la aceleración $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$ se tiene que $\ddot{r} = \ddot{\theta} = 0$. Luego

$$\vec{a} = -12\hat{\mathbf{r}} + 16\hat{\theta}$$

La magnitud entonces es $\sqrt{12^2+16^2} = 20$ [m/s^2]

Problema 45.
Una rueda de radio R avanza girando sin resbalar por un plano. Su centro se mueve a velocidad constante V y una pequeña marca de color en la superficie de la rueda está en contacto con el piso en $t = 0$. Encuentre la posición, velocidad y aceleración de la marca de color en función del tiempo.

Solución:
Se tiene la siguiente situación cuando la rueda avanza:



Sean x,y las coordenadas de la marca, ρ el vector desde el origen del sistema hasta el centro de la rueda y R' el vector desde el centro de la rueda hasta la marca. Se tiene con esto que:

$$\begin{aligned} \rho &= R\theta\hat{\mathbf{i}} + R\hat{\mathbf{j}} \\ R' &= -R\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}} - R\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que la posición vectorial de la marca viene dada por:

$$x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} = \rho + R' = (R\theta - R\sin(\theta))\hat{\mathbf{i}} + (R - R\cos(\theta))\hat{\mathbf{j}} = \vec{r}$$

calculamos ahora la velocidad

$$\begin{aligned}\vec{v} = \vec{r}' &= (R\dot{\theta} - R\cos(\theta)\dot{\theta})\hat{\mathbf{i}} + R\sin(\theta)\dot{\theta}\hat{\mathbf{j}} \\ &= R\omega[(1-\cos(\theta))\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}]\end{aligned}$$

y la aceleración queda entonces como:

$$\vec{a} = \vec{v}' = R\omega^2\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}} + R\omega^2\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}}$$

Lo anterior porque como la rueda se mueve a velocidad V constante y tiene un radio R fijo, $\omega' = \ddot{\theta} = 0$. Para agregar la dependencia de del tiempo, se tiene que $\frac{d}{dt}R\theta(t) = V$ luego $\theta(t) = \frac{V}{R}t + \theta_o$.

Problema 46.
Una partícula se mueve según $r = A\theta$ con $A = 1/\pi$ [m/rad] constante. θ aumenta en el tiempo según $\theta = \alpha t^2/2$ con α constante. Muestre que la aceleración radial es nula cuando $\theta = 1/\sqrt{2}$ [rad].

Solución:
Tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \\ a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

como $r = A\theta \Rightarrow r'' = A\ddot{\theta} = A\alpha$. De lo anterior se desprende además que $\ddot{\theta} = \alpha$ y $\dot{\theta} = \alpha t$. Con esto:

$$a_r = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^3 t^4}{2\pi}$$

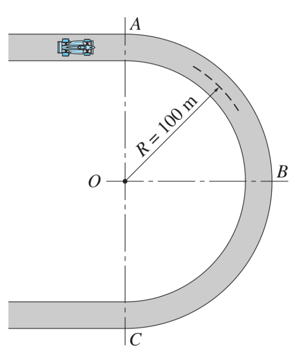
despejamos el valor de t que anula lo anterior:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\pi} &= \frac{\alpha^3 t'^4}{2\pi} \\ \Rightarrow t'^2 &= \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\end{aligned}$$

evaulando θ en t':

$$\theta(t') = \frac{\alpha t'^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ [rad]}$$

Problema 47.
Un auto de carreras viaja a 90 [km/hr] por una pista cuando entra por A a un sector semicircular. El conductor acelera a una tasa constante, saliendo por C con una rapidez de 144 [km/hr]. Determine la magnitud de la aceleración en B.



Solución:
Sea s la distancia recorrida entre A y C. Como la aceleración tangencial es constante, la velocidad tangencial aumenta a una tasa constante. Integrando, tenemos que:

$$\int a_t \cdot ds = \int v \cdot dv$$
$$a_t s + K = \frac{v^2}{2}$$

sabemos que en el punto A, $s = 0$ y $v = 25$ [m/s]= 90 [km/hr] y en C, $s = 100\pi$ [m] y $v = 40$ [m/s]. Reemplazando la condición inicial en la ecuación anterior queda $K = 312.5$ [m/s^2]. Con este valor, reemplazamos cuando el auto está en C

$$\frac{40^2}{2} = 100\pi a_t + 312.5$$
$$a_t = 1.55$$

con esto, se tiene que la ecuación que describe el movimiento del automóvil es

$$\frac{v^2}{2} = 1.55s + 312.5$$

reemplazando en el punto de interés, $s = 50\pi$ queda

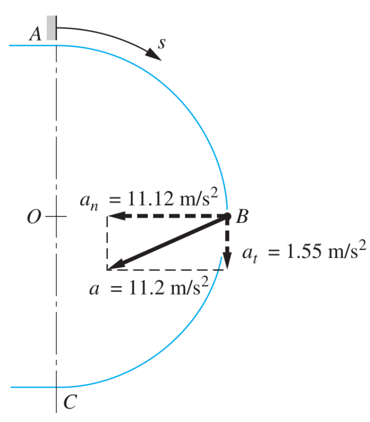
$$v_B = 33.35$$

luego, la aceleración centrípeta en ese punto es

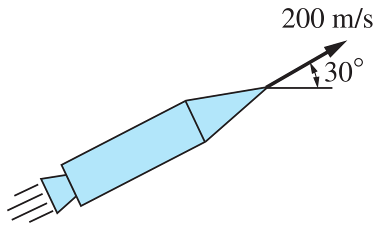
$$a_n = \frac{v_B^2}{R} = \frac{33.35^2}{100} = 11.12$$

el módulo de la aceleración en B es

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 11.2$$



Problema 48.
El cohete de la figura sobrevuela la tierra a una altura cercana a la superficie. Determine el radio de curvatura en el instante mostrado.



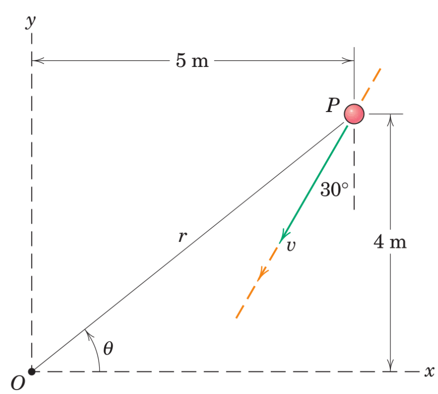
Solución:
Como el cohete está volando a un altura cercana a la superficie, $a_n = g$. Con esto,

$$\begin{aligned} g &= \frac{v_t^2}{R} \\ &= \frac{(200\cos(30))^2}{R} \end{aligned}$$

luego

$$R = \frac{150}{g}$$

Problema 49.
La partícula P viaja en línea recta con rapidez $v = 10$ [m/s]. Para el instante mostrado, determine los valores de $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$, tomando como origen del sistema al punto O.



Solución:
Tenemos que:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{5^2 + 4^2} = 6.4 \\ \theta &= \arctan(4/5) = 38.66 \\ v_x &= -10\cos 30 = -8.66 \\ v_y &= -10\sin 30 = -5 \end{aligned}$$

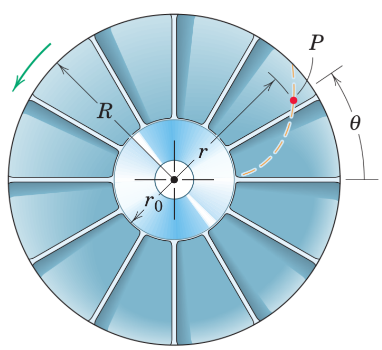
trasladando el sistema de referencia, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{r}\cos(\theta) &= \vec{x} \\ \vec{r}\sin(\theta) &= \vec{y} \\ \vec{\theta}\sin(\theta) &= -\vec{x} \\ \vec{\theta}\cos(\theta) &= \vec{y} \end{aligned}$$

con esto:

$$\dot{r} = \frac{v_x}{\cos\theta} + \frac{v_y}{\sin\theta} = -19.09$$
$$\dot{\theta} = -\frac{v_x}{\sin\theta} + \frac{v_y}{\cos\theta} = 7.46$$

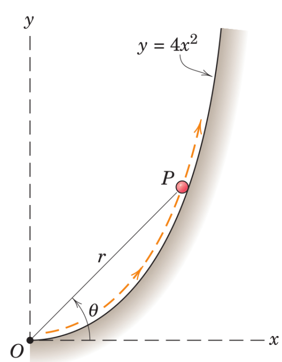
Problema 50.
La posición radial de una partícula P dentro de una centrífuga puede ser aproximada por $r = r_o \cosh(Kt)$, donde t es el tiempo y $K = \dot{\theta}$ es la velocidad angular del contenedor. Detemine el tiempo que demora la partícula cuando para estar a una distancia R del centro:



Solución:
Tenemosque el tiempo t_R para que la partícula esté a un radio R es tal que:

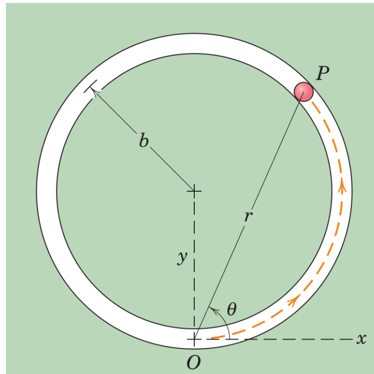
$$R = r_o \cosh(Kt_R)$$
$$t_R = \frac{\cosh^{-1}(R/r_o)}{K}$$

Problema 51.
Una pelota P se mueve por un camino parabólico como se muestra en la figura. Cuando $x = 0.2$ [m], determine el valor de r.



Solución:
Como $x = 0.2$ entonces $y = 4 \cdot 0.2^2 = 0,16$. Luego $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0.2561$

Problema 52.
La partícula P parte del reposo en el punto O en $t = 0$ y luego se mueve con una aceleración tangencial α_t mientras describe una trayectoria circular. Determine r como función del tiempo para la primera vuelta de P.



Solución:
Como la trayectoria es fija, podemos parametrizar cualquier punto en función del ángulo θ. Tenemos que para $\theta(0) = 0$, $r = 0$ y para $\theta(T/2) = \pi$, $r = 2R$. Tenemos entonces que

$$r(t) = 2R \sin\theta(t)$$

Problema 53.
Obtenga la relación polar y bosqueje el gráfico de una recta.

Solución:
Distinguimos dos casos. Cuando la recta pasa por el origen ($y = mx$), esta queda definida sólo mediante el ángulo que forma con el origen:

$$\theta = \theta_m = \arctan(m)$$

Sin embargo, cuando la recta ya no pasa por el origen, procedemos a reemplazar directamente:

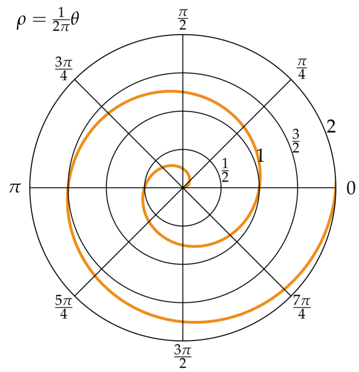
$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ r\sin(\theta) &= mr\cos(\theta) + n \\ r &= \frac{n}{\sin(\theta) - m\cos(\theta)} \end{aligned}$$

Problema 54.
Obtenga la relación polar y bosqueje el gráfico de una espiral a) de Arquímides y b) logarítimica.

Solución:

a) La espiral de Arquímides o espiral aritmética es aquella en donde el radio aumenta a una tasa constante en función del ángulo:

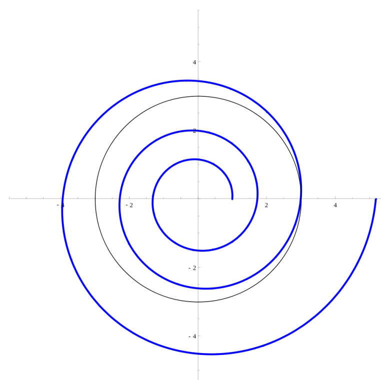
$$r = r_o + a(\theta - \theta_o)$$



Notamos que para un ángulo dado, la distancia entre cada vuelta es $2a\pi$

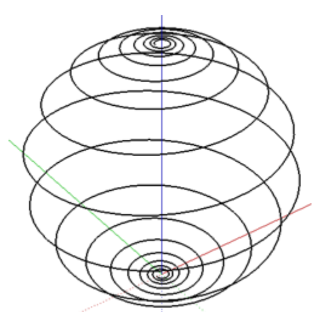
b) La espiral logarítmica o espiral equiangular es aquella cuya trayectoria tiene ángulo respecto a $\hat{\theta}$ constante:

$$r = r_o a^{\theta - \theta_o}$$



Notamos que el ángulo formado con $\hat{\theta}$ es $\arctan(\ln(a))$

Problema 55.
Encuentre las ecuaciones necesarias para describir una *loxodrómica* de radio R y un número arbitrario n de vueltas:



Solución:
Notamos que para toda la trayectoria pedida, el radio se mantiene constante. Expresando el camino en coordenadas esféricas, se tiene que θ dependerá de la cantidad de vueltas: $\theta \in [0{,}2n\pi)$. A su vez, el rango de φ se mantendrá fijo pues hay que llegar de un polo a su opuesto en la esfera. Con esto, se tiene que:

$$\rho = R$$
$$\theta \in [0, 2n\pi)$$
$$\varphi \in [-\pi/2, \pi/2)$$

La manera en que aumenta φ depende de θ, pues considera una «altitud» en particular para cada ángulo desde que se parte en un polo y se llega al otro. Como el rango se mantiene fijo, tenemos que:

$$\varphi = -\pi/2 + \frac{\theta}{2n}$$

luego las ecuaciones que describen esta curva son

$$(\rho, \theta, \varphi) = P(R, \theta, n) = \left(R, \theta, -\pi/2 + \frac{\theta}{2n}\right)$$

Problema 56.
La ionósfera es una región de gases neutros, compuesta de iones positivos y electrones con carga negariva que rodea a la tierra a una altura aproximada de 200 [km]. Si una onda de radio pasa a través de la ionósfera, su campo eléctrico acelera las partículas cargadas. Como el campo oscila en el tiempo, las partículas cargadas tienden a vibrar hacia adelante y hacia atrás. El problema es encontrar qué movimiento describe un electrón de carga $-e$ y masa m que está inicialmente en reposo y que súbitamente se somete a un campo eléctrico $\mathbf{E} = \mathbf{E_o}\sin(\omega\text{t})$ (la fuerza $\mathbf{F}$ de un electrón bajo el efecto de un campo eléctrico es $\mathbf{F} = -\text{e}\mathbf{E}$).

Solución:
De la definición de fuerza tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{-e\mathbf{E}}{m} \\ &= \frac{-e\mathbf{E_o}}{m}\sin(\omega t)\end{aligned}$$

Como $\mathbf{E_o}$ es constante, elegimos nuestro sistema de coordenadas de tal forma que el campo sea paralelo al eje x. Como no hay aceleración en el eje y o z, consideramos sólo el movimiento en x

$$a(t) = \frac{-eE_o}{m}\sin(\omega t) = a_o\sin(\omega t)$$

donde $a_o = \frac{-eE_o}{m}$. Luego

$$\begin{aligned}v(t) &= v_o + \int_0^t a(t')dt' \\ &= v_o - \frac{a_o}{\omega}\cos(\omega t)\big|_0^t \\ &= v_o - \frac{a_o}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)\end{aligned}$$

y también

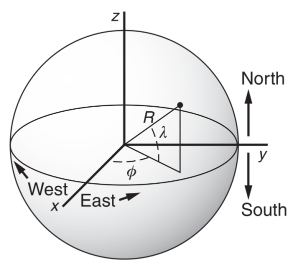
$$\begin{aligned}x(t) &= x_o + \int_0^t v(t')dt' \\ &= x_o + \int_0^t \left[v_o - \frac{a_o}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)\right]dt' \\ &= x_o + \left(v_o + \frac{a_o}{\omega}\right)t - \frac{a_o}{\omega^2}\sin(\omega t)\end{aligned}$$

el electrón se encuentra inicialmente en reposo luego $x_o = v_o = 0$ entonces:

$$x(t) = \left(\frac{a_o}{\omega}\right)t - \frac{a_o}{\omega^2}\sin(\omega t)$$

Esto quiere decir que a medida que el electrón se mueve a través de la ionósfera, oscila en torno al punto en donde se encuentra con la misma frecuencia del campo que actúa sobre él, como consecuencia de la interacción eléctrica entre ellos.

Problema 57.
La distancia más corta entre dos puntos en la superficie de la tierra (considerada como una esfera perfecta de radio R) es el arco de la circunferencia que está en el plano que pasa por los dos puntos y el centro de la tierra, intersecado con la esfera. La posición de un punto en la superficie de la tierra puede ser especificado por su longitud ϕ y su latitud λ. La longitud mide el ángulo entre el meridiano que cruza el punto y el meridiano de Greenwich, midiéndose positiva al este de Greenwich y negativa al oeste. La latitud es el ángulo que forma el paralelo que pasa por el punto y la línea del Ecuador, midiéndose positiva al norte de este. Sean dos puntos $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ y θ el ángulo entre ellos. Encuentre una expresión para θ en función de las coordenadas cartesianas de ambos puntos utilizando el siguiente sistema de referencia:



Solución:
Tenemos que las coordenadas de un punto r_i en la superficie de la esfera son:

$$\vec{r}_i = R\cos(\lambda_i)\cos(\phi_i)\hat{\mathbf{i}} + R\cos(\lambda_i)\sin(\phi_i)\hat{\mathbf{j}} + R\sin(\lambda_i)\hat{\mathbf{k}}$$

Así mismo, el ángulo (en radianes) entre 2 puntos cualesquiera puede ser encontrado ocupando el producto punto:

$$\theta_{1,2} = \arccos\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2}\right) = \left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{R^2}\right)$$

Con esto, la distancia entre los dos puntos es $S = R\theta_{1,2}$ luego:

$$\begin{aligned} S &= R\underbrace{\arccos[\cos(\lambda_1)\cos(\lambda_2)(\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) + \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)) + \sin(\lambda_1)\sin(\lambda_2)]}_{\theta} \\ &= R\arccos\left[\frac{1}{2}\cos(\lambda_1+\lambda_2)[\cos(\phi_1-\phi_2)-1] + \frac{1}{2}\cos(\lambda_1-\lambda_2)[\cos(\phi_1-\phi_2)+1]\right] \end{aligned}$$

Problema 58.
Utilizando sus conocimientos sobre números complejos y su relación con las coordenadas polares, «demuestre» la identidad de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Solución:
La forma polar de los números complejos $z = re^{i\theta}$ permite representar cualquier número en el plano de Argand, de manera completamente análoga a la representación de un punto en el plano XY en coordenadas polares. Con esto, tenemos que por ejemplo la coordenada $(0, 1) = (1, \pi/2)$ se puede considerar como el número complejo $0 + 1\mathbf{i}$.

Con lo anterior, tenemos que la coordenada $(-1, 0)$ en coordenadas cartesianas corresponde a $(1, \pi)$ en coordenadas polares. Extrapolando esto a los complejos, tenemos que $-1 + 0\mathbf{i} = 1 \cdot e^{i\pi}$ luego $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Problema 59.
Un alumno de un curso de electromagnetismo le pide ayuda para estudiar Ley de Gauss. Para esto, usted debe asesorarlo sobre qué sistema de coordenadas utilizar para parametrizar una variedad de formas en el espacio: cajas, esferas y cilindros. ¿Qué sistema utilizaría para trabajar con estos cuerpos de la manera más fácil posible? Indique cómo representaría tales formas en el sistema de coordenadas más adecuado en cada caso.

Solución:
Para cada uno de los tres cuerpos pedidos, lo más adecuado es trabajar con los tres sistemas de coordenadas en el espacio que conocemos:

1. cajas: ocupando el sistema cartesiano, tenemos que una caja queda queda definida por su frontera según:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \\ x_2 &= a_2 \\ y_1 &= b_1 \\ y_2 &= b_2 \\ z_1 &= c_1 \\ z_2 &= c_2 \end{aligned}$$

   esto es, la intersección de seis planos paralelos a los ejes coordenados.

2. esferas: ocupando la simetría del sistema esférico, tenemos que la frontera de una esfera queda definida únicamente por:

$$r = r_o$$

3. cilindros: ocupando el sistema cilíndrico (valga la redundancia), podemos definir la frontera mediante dos tapas y el cuerpo del cilindro:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 \\ z_2 &= a_2 \\ r &= r_0 \end{aligned}$$

Problema 60.
Las ecuaciones paramétricas permiten describir curvas y superficies que no necesariamente pueden ser expresadas como una función entre sus coordenadas. Por ejemplo, una circunferencia de radio r centrada en el origen puede ser descrita según:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Para $0 \leq \theta < 2\pi$. Ocupando sus vastos conocimientos sobre los distintos sistemas de coordenadas ¿cómo se podría parametrizar una elipse de semiejes a y b centrada en el origen?

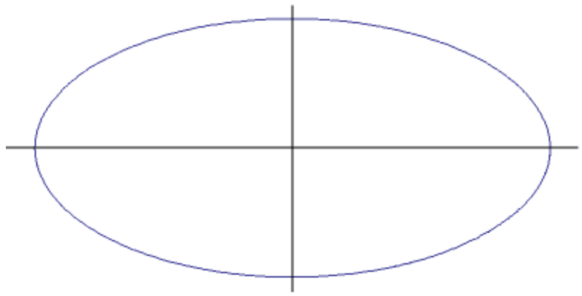
Solución:
Podemos notar que una circunferencia no es más que una elipse cuyos semiejes son iguales. Ocupando este hecho, podemos intuir que una parametrización de la elipse es de la forma

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{aligned}$$

Probando en los ángulos críticos (múltiplos de $\pi/2$), tenemos que

$$\begin{aligned}
\theta = 0 \Rightarrow x = a \quad & y = 0 \\
\theta = \pi/2 \Rightarrow x = 0 \quad & y = b \\
\theta = \pi \Rightarrow x = -a \quad & y = 0 \\
\theta = 3\pi/2 \Rightarrow x = 0 \quad & y = -b
\end{aligned}$$

Según lo anterior todo parece indicar que es una parametrización adecuada. Graficando en Wolfram Mathematica tenemos:



**Una demostración más formal debiera incluir una demostración de la excentricidad de la parametrización encontrada, pero eso escapa a los objetivos de la Nivelación.

Referencias

Los ejercicios e imágenes se obtuvieron de las siguientes fuentes:

1. DASGUPTA, *Kinematics of Particles*
2. KLEPPNER & KOLENKOW, *An Introduction to Mechanics*
3. LEHMANN, *Geometría Analítica*
4. PYTEL, *Engineering Mechanics - Dynamics*